ÜBER DIE WERTBEREICHE DES REFLEXIONS-KOEFFIZIENTEN UND DER GRUPPENGESCHWINDIGKEIT*

Von

K. GÉHER

Lehrstuhl für drahtgebundene Nachrichtentechnik der Technischen Universität, Budapest

(Eingegangen am 4. März, 1960)

1. Problemstellung

In unseren Berechnungen kommen häufig die Begriffe des Reflexionskoeffizienten und der Gruppengeschwindigkeit vor. Oft wird der Versuch gemacht, ihre bei der Lösung eines weiten Kreises nachrichtentechnischer Probleme gebräuchlichen Begriffe auch auf Gebieten anzuwenden, auf denen sie überhaupt keine Gültigkeit mehr haben. Im folgenden soll die Bedeutung der Wertbereiche an den Beispielen des Reflexionskoeffizienten und der Gruppengeschwindigkeit gezeigt werden. Wir wollen uns dabei zunächst auf den Sonderfall der Fernleitung beschränken und die in der untenstehenden Tabelle angeführten Grundbegriffe untersuchen.

Tabelle 1

Die komplexen Amplituden der Spannungen bzw. Ströme in den Richtungen »+« und »—«	$U_0^+,\ U_0^-,\ I_0^+,\ I_0^-$
Ausbreitungskoeffizient	$\gamma = \alpha + j\beta$
Wellenwiderstand	$Z_0 = \dfrac{U_0^+}{I_0^+} = \sqrt{\dfrac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$
Reflexionskoeffizient	$r = \dfrac{U_0^-}{U_0^+} = \dfrac{Z_t - Z_0}{Z_t + Z_0}$
Phasengeschwindigkeit	$v_{ph} = \dfrac{\omega}{\beta}$
Gruppengeschwindigkeit	$v_{gr} = \dfrac{d\omega}{d\beta}$

Die Tabelle enthält einige Netzkenngrößen, die bei Fernleitungen angewendet werden. Es stellt sich die Frage, welche Werte diese Kenngrößen grundsätzlich annehmen können, d. h. wie groß ihr Wertbereich ist?

Betrachten wir z. B. den Wellenwiderstand Z_0. In Bild 1a sind die Wertbereiche von $R + j\omega L$ bzw. $G + j\omega C$ gezeigt, aus denen der Wertbereich

* Vortrag, gehalten an der wissenschaftlichen Tagung anläßlich des 10jährigen Bestehens der Fakultät der Elektroingenieure an der Budapester Technischen Universität.

von Z_0 festgestellt wurde. Wie aus Bild 1b ersichtlich, hat der Wellenwiderstand der Fernleitung einen bestimmten Wertbereich: $|Im Z_0| \leq Re\, Z_0$. Der Umstand, daß dieses Resultat durch Messungen bestätigt wurde [1], lenkt die Aufmerksamkeit auf die Erörterung des Wertbereiches der Netzkenngrößen. Als nächste Frage wollen wir daher den Reflexionskoeffizienten untersuchen.

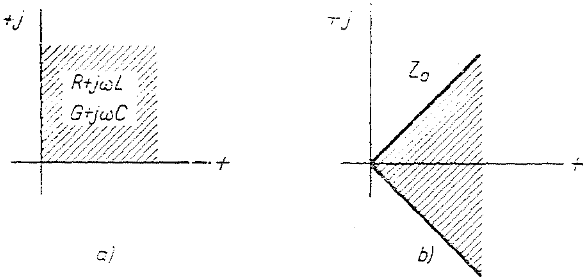

Bild. 1

2. Der Begriff des Reflexionskoeffizienten

Bei der Untersuchung des Reflexionskoeffizienten gelangen wir ebenfalls zu einem bestimmten Wertbereich [2]. Es seien nämlich $Z_t = jX$ und $Z_0 = R_0 - jX_0$ d. h. wir haben mit dem reaktanten Abschluß einer verlustbehafteten Fernleitung zu tun. Für diesen Fall kann der Reflexionskoeffizient

$$r = \frac{Z_t - Z_0}{Z_t + Z_0}$$

folgendermaßen umgestaltet werden:

$$r = \frac{jX - R_0 + jX_0}{jX + R_0 - jX_0}$$

$$|r|^2 = \frac{R_0^2 + (X + X_0)^2}{R_0^2 + (X - X_0)^2} \,.$$

Dies bedeutet, daß der Reflexionskoeffizient größer ist als 1.

Zwecks Ermittlung des Wertbereiches kann der Reflexionskoeffizient mit der Bezeichnung $\frac{Z_t}{Z_0} = Z$ in der Gestalt $r = \frac{Z - 1}{Z + 1}$ geschrieben werden. Dieser Ausdruck bedeutet die konforme Abbildung der Fläche Z in die Fläche r. Im Bild 2 ist das Resultat der Abbildung für verschiedene Sonderfälle dargestellt. Wie ersichtlich, kommen bei komplexem Abschluß der verlustbehafteten Fernleitung auch Reflexionskoeffizienten vor, die einen größeren Wert als 1 haben.

Bei Fernleitungen werden die Spannung und der Strom aus den in den Richtungen »+« und »−« laufenden Wellen zusammengesetzt. Es ist bemerkenswert, daß die durch die Fernleitung übertragene Leistung im Allgemeinfall nicht in Leistungen zerlegt werden kann, die in den Richtungen »+« und »−« laufen. Im Ausdruck

$$P = UI^* = U^+ I^{+*} + U^- I^{-*} + U^- I^{+*} + U^+ I^{-*}$$

erscheinen nämlich auch die Glieder $U^- I^{+*}$ und $U^+ I^{-*}$. Von einer reflektierten Leistung kann man nur dann sprechen, wenn der Reflexionskoeffizient rein reell, d. h. $Im\ r = 0$ ist. Dem ist natürlich so, bezieht sich doch der Grundsatz der Überlagerung auf die Spannung bzw. auf den Strom und nicht auf die Leistung.

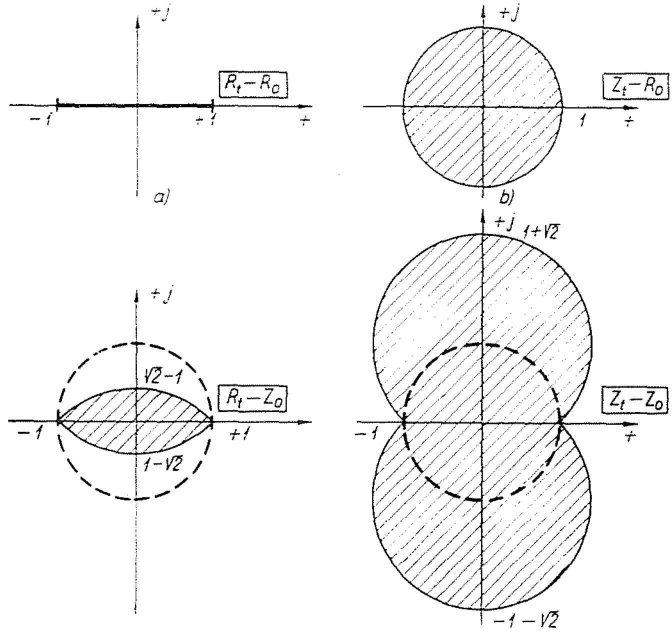

Bild. 2

3. Der Begriff der Gruppengeschwindigkeit

Bei der Einführung des Begriffes der Gruppengeschwindigkeit geht man zweckmäßig von der Untersuchung des der Fernleitung entlang sich ausbreitenden Signals aus. In unserem Falle wird das Signal an der Stelle $x = 0$ durch die Fourier-Integrale

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega, \quad S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

hergestellt, während das der Fernleitung entlang sich ausbreitende Signal an der Stelle x in der Gestalt

$$y(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\, e^{j\omega t - \gamma(\omega)x}\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\, e^{-\alpha(\omega)x}\, e^{j[\omega t - \beta(\omega)x]}\, d\omega$$

geschrieben werden kann. Da $\alpha(\omega)$ und $\beta(\omega)$ im allgemeinen komplizierte Funktionen sind, kann das letztere Integral mit einfachen Mitteln nicht berechnet werden. Nehmen wir an [3],

1. daß das Frequenzband sich nicht von $(-\infty)$ bis $(+\infty)$, sondern nur von $(\omega_0 - \Delta\omega)$ bis $(\omega_0 + \Delta\omega)$ erstreckt;

2. daß $\alpha(\omega) = \text{const}$ (im weiteren wird es zweckmäßig zu 0 angenommen);

3. daß der Phasenfaktor

$$\beta(\omega) = \beta(\omega_0) + \left(\frac{\partial\beta}{\partial\omega}\right)_{\omega_0} (\omega - \omega_0) + \left(\frac{\partial^2\beta}{\partial\omega^2}\right)_{\omega_0} (\omega - \omega_0)^2 + \ldots$$

durch die ersten zwei Glieder seiner Taylorschen Reihe gut angenähert werden kann.

In diesem Falle gilt

$$y(x,t) \approx \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} S(\omega)\, e^{j\left[(\omega-\omega_0)t - \left(\frac{\partial\beta}{\partial\omega}\right)_{\omega_0}(\omega-\omega_0)x\right]}\, e^{j[\omega_0 t - \beta(\omega_0)x]}\, d\omega ,$$

woraus die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der umhüllenden Kurve

$$v_{gr} = \frac{1}{\left(\frac{\partial\beta}{\partial\omega}\right)_{\omega_0}} = \left(\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\right)_{\beta_0}$$

ist.

Das Fourier-Integral bedeutet — wie man weiß —, daß zur Herstellung der Zeitfunktion endlicher Zeitdauer grundsätzlich ein unendliches Frequenzband notwendig ist. Aus der Symmetrie des Fourier-Integrals folgt, daß umgekehrt zum endlichen Frequenzband ein unendliches Signal gehört. Da nach unseren Voraussetzungen das Freqenzband endlich ist, dauert unser Signal zeitlich von $(-\infty)$ bis $(+\infty)$. Es kann also von einem Signal im ursprünglichen Sinne des Wortes überhaupt keine Rede sein.

Letzten Endes ist die Gruppengeschwindigkeit ein zur Beschreibung einer komplizierten Erscheinung dienender Begriff, woraus folgt, daß man bei seiner Anwendung stets mit Vorsicht vorgehen muß. Im Allgemeinfall stimmt sie mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Energie oder des Signals nicht überein, es ist also selbstverständlich, daß sie größer und kleiner als die Lichtgeschwindigkeit c sein kann. In diesem Sinne besteht also keine Beschränkung bezüglich ihres Wertbereiches. In Bild 3 sind die Werte von v_{ph} und v_{gr} für den Fall einer verlustbehafteten Fernleitung aufgetragen [4]. Man erkennt, daß v_{gr} auch einen größeren Wert als die Lichtgeschwindigkeit haben kann und im allgemeinen $v_{gr}\, v_{ph} \neq c^2$ ist.

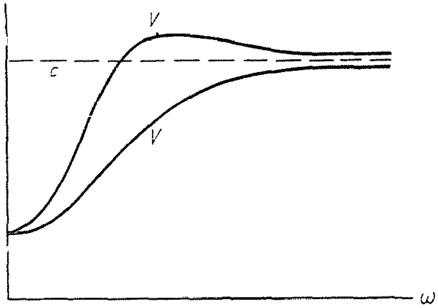

Bild. 3

4. Praktische Beziehungen

Geht man von der Fernleitung auf Systeme mit konzentrierten Kenngrößen über, so kann der Reflexionskoeffizient an der komplexen Zahlenebene r einen beliebigen Wert annehmen. Die Rolle des Fortpflanzungsmaßes $\gamma = \alpha + j\beta$ wird dabei durch die Betriebsübertragung $g = a + jb$ übernommen, die Stelle der Gruppengeschwindigkeit nimmt somit die Gruppenlaufzeit

$$\tau_{gr} = \frac{db}{d\omega}$$

ein. Die Gruppenlaufzeit ist — der Gruppengeschwindigkeit ähnlich — ein zur annähernden Beschreibung der Erscheinungen dienender Begriff. Auf die Grenzen der Annäherung weist auch z. B. die im Falle von Dämpfungspolen sich ergebende negative Gruppenlaufzeit hin.

In der Netztheorie tritt der Begriff des Reflexionskoeffizienten bei der Dimensionierung von Netzen mit vorgeschriebener Reflexion (Dimensionierung mit Betriebskenngrößen) bei Anpassungsproblemen auf. So sind z. B. die bei der Stabilität der Netze von negativer Impedanz auf die fehlerhafte Bedingung $|r|_{max} = 1$ dimensionierten Netzwerke der Erregung ausgesetzt. Unter Berücksichtigung der Tatsache, daß $|r|_{max} = 2{,}41$, kann die Erregung von Verstärkern mit negativer Impedanz vermieden werden [5].

In der Mikrowellentechnik begegnet man dem Begriff der Gruppengeschwindigkeit bei der Untersuchung der Fortpflanzung von Signalen (z. B. des Systems PCM — Pulskodemodulation —) und bei der Projektierung von

Verzögerungsleitungen der Mikrowellenelektronenröhren. Bei der Reflexion elektromagnetischer Wellen (z. B. Radarsignale) oder bei der Messung des Stehwellenverhältnisses hat man den Wertbereich des Reflexionskoeffizienten oft zu berücksichtigen.

Die Untersuchung des Wertbereiches der Netzkenngrößen ist auch deshalb wichtig, weil sie die Aufmerksamkeit auf die Gefahr der unangebrachten Verallgemeinerung lenkt. Diese Untersuchung trägt zur richtigen Deutung der allgemein gebräuchlichen Begriffe, zur Ausprägung von Definitionen bei und weist auf die bei den Anwendungen auftretenden Beschränkungen hin.

Zusammenfassung

Es wird darauf hingewiesen, daß beim Abschluß verlustbehafteter Fernleitungen durch komplexe Impedanz der Reflexionskoeffizient $r = \frac{U^-}{U^+}$ auch den Wert $|r| > 1$ annehmen kann. Die Einführung des Begriffes der Gruppengeschwindigkeit wird untersucht und ein Beispiel für die Gruppengeschwindigkeitswerte $v_{gr} > c$ gegeben. Schließlich wird auf die praktischen Beziehungen der Resultate hingewiesen.

Literatur

1. LAJTHA, GY.: (Posta Kísérleti Intézet — Versuchsinstitut der ungarischen Postverwaltung), persönliche Mitteilung.
2. GÉHER, K.: Die Deutung des Reflexionskoeffizienten, Magyar Híradástechnika, **4—5** (1957).
3. GÉHER, K.: Bemerkungen über die Gruppengeschwindigkeit, Magyar Híradástechnika, **9—10** (1954).
4. GUILLEMIN, E. A.: Communication networks I—II.
5. LAJTHA, GY.: Ein Verstärker von negativer Impedanz, Magyar Híradástechnika, (1958).
6. SIMONYI, K.: Theoretische Elektrotechnik.

K. GÉHER, Budapest XI., Stoczek u. 2. Ungarn.